

臺中市立文華高級中等學校 113 學年度
學術性向資賦優異 【數理類】學生入班鑑定

數學實作評量 試題卷

測驗說明：

一、考試時間：120 分鐘

二、請將答案寫在答案卷上，否則不予計分。(答案卷請勿使用鉛筆作答！)

三、試題分為兩部份：

第一大題為填充題(分為第一部份 8 題與第二部份 10 題)：答案須化至最簡形式(最簡分式、根式有理化…等)，否則不予計分，未完全答對者也不予計分。

第二大題為計算證明題(共 3 題)：請清楚標明題號並寫出演算過程(或敘明理由)，否則不予計分。

四、試題所附之圖形(比例)僅供參考，不一定代表實際比例大小。

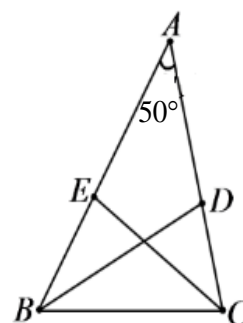
五、答案卷共有兩張(每張皆為雙面)，請勿在填充題之答案卷上書寫任何計算過程或於答案卷上註記與答案無關之符號。

第一大題、填充題：

第一部份(共 8 題；每格 4 分，共 32 分。)

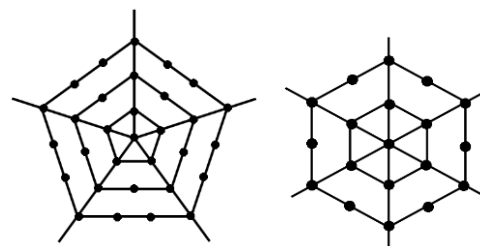
1. 隨機選取一個五位的正整數 N ，若每一個五位數被選取的機會都相同，則 \sqrt{N} 是完全平方數的機率為_____。

2. 如右圖所示，在 $\triangle ABC$ 中， \overline{BD} 、 \overline{CE} 分別為 $\angle ABC$ 與 $\angle ACB$ 的角平分線，且 $\angle A = 50^\circ$ ，則 $\angle BEC + \angle BDC =$ _____度。



3. 設 a, b, c 皆為正整數，且 $a \geq b \geq c$ ，並滿足 $a + b + c = 26$ ，則以 a, b, c 為三邊長的三角形共有_____個。

4. 已知 $f(x)$ 為二次函數，且 $f(x)$ 有最小值，若 $|f(2)| = |f(4)| = |f(6)| = |f(8)| = 16$ ，則 $|f(5)| =$ _____。
5. 箱子內有六顆球分別編號 1、2、3、4、5、6，小元任意取出若干顆球且至少取出 1 顆，已知取出球的編號總和為偶數，則共有 _____ 種取法。
6. 將等差數列 1, 3, 5, 7, ... 分組，同一個括號內為同一組，第一組 (1)、第二組 (3, 5)、第三組 (7, 9, 11)、... 即第 n 組中有 n 個數，若 1001 為第 x 組的第 y 個數，則數對 $(x, y) =$ _____。
7. 右圖左是五軸四層的蜘蛛網，共有 31 個點；右圖右是六軸三層的蜘蛛網，共有 19 個點。按照此規律，請問十二軸八層的蜘蛛網上共有 _____ 個點。



8. 有一個五位數 $a986b$ 可被 72 整除，其中 a 是萬位數、 b 是個位數。請問數對 $(a, b) =$ _____。

第二部份（共 10 題；每格 5 分，共 50 分。）

9. 已知 $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ ，試求 $21^2 + 22^2 + 23^2 + \dots + 40^2 =$ _____。

10. 把七本相同的書，分給甲、乙、丙三個人，每人至少分到一本書，則共有_____種分法。

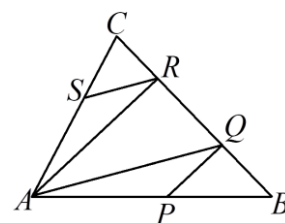
11. 在三角形 ABC 中，設 $\overline{BC}=12$ ， $\overline{AC}=16$ ，且 \overline{BE} 、 \overline{AD} 分別是邊 \overline{AC} 、 \overline{BC} 上的中線，若 $\overline{BE} \perp \overline{AD}$ ，則 $\overline{AB}=\rule{1.5cm}{0.4pt}$ 。

12. 現有兩個兩股分別為 1、 a 的直角三角形及一個兩股皆為 a 的直角三角形，若用這三個直角三角形的斜邊圍成的三角形面積為 $\frac{3\sqrt{7}}{2}$ ，求 $a=\rule{1.5cm}{0.4pt}$ 。

13. $\triangle ABC$ 中， $\overline{AB}=5$ ， $\overline{BC}=6$ ， $\overline{CA}=7$ ， P 為 $\triangle ABC$ 內部一點， D, E, F 分別為 $\triangle PBC, \triangle PAC, \triangle PAB$ 的重心，則 $\triangle DEF$ 的周長為_____。

14. 如右圖， $\triangle ABC$ 中， P 在 \overline{AB} 上， Q, R 在 \overline{BC} 上， S 在 \overline{AC} 上，若滿足 $\overline{AR} \parallel \overline{PQ}$ ， $\overline{AQ} \parallel \overline{RS}$ ，且 $\triangle CSR$ 面積為 10，

$\triangle ARS$ 面積為 30， $\triangle QPB$ 面積為 20，則 $\frac{\overline{AP}}{\overline{PB}}=\rule{1.5cm}{0.4pt}$ 。

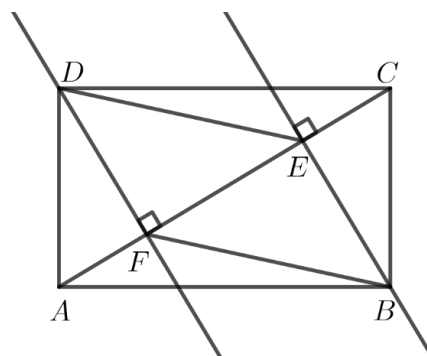


15. 坐標平面上有一圓過 $B(0,1)$ 、 $C(0,5)$ ，並和 x 軸相切於 A 點，則 $\cos \angle BAC =$ _____。

16. 一個團隊裡，共有 4 個男生， n 個女生，若從中一次挑選出兩人，且選到 1 男 1 女的機率為 $\frac{16}{33}$ ，則 $n =$ _____。

17. 若函數滿足 $2f(x) + 3f(y) = 5f(\frac{2x+3y}{5})$ ，且 $f(2)=1$ 、 $f(7)=11$ ，則 $f(2024) =$ _____。

18. 如下方示意圖，自矩形 $ABCD$ 的兩頂點 B 、 D 作垂直對角線 \overline{AC} 的兩平行線 BE 與 DF ，已知 $\overline{AF} = 2$ ， $\overline{EF} = 3$ ， $\overline{CE} = 2$ ，則平行四邊形 $BFDE$ 的面積為_____。



第二大題、計算證明題（共 3 題；每題 6 分，共 18 分。）

1. 設 $a > 0$ 且 $b > 0$ ，證明： $(a^2 + b^2)(a^4 + b^4) \leq (a + b)(a^5 + b^5)$

2. 方程組 $\begin{cases} x(y + z - x) = 28 - 2x^2 \\ y(z + x - y) = 70 - 2y^2 \\ z(x + y - z) = 98 - 2z^2 \end{cases}$ 的正實數解為 $(x, y, z) = \underline{\hspace{2cm}}$

3. 有 5 人比圍棋循環賽，每人皆需和另外 4 人比賽，每局棋皆需分出勝負，當所有比賽結束，每人皆 2 勝 2 負的勝負情況有 種