

臺中市立文華高級中等學校 111 學年度
學術性向資賦優異【數理類】學生入班鑑定

數學實作評量 試題卷

測驗說明：

一、請將答案寫在答案卷上，否則不予計分。(答案卷請勿使用鉛筆作答！)

二、試題分為兩部份：

第一大題為填充題(分為第一部份 8 題與第二部份 8 題)：答案須化至最簡形式(最簡分式、根式有理化…等)，否則不予計分，未完全答對者也不予計分。

第二大題為計算證明題(共 3 題)：請清楚標明題號並寫出演算過程(或敘明理由)，否則不予計分。

三、試題所附之圖形(比例)僅供參考，不一定代表實際比例大小。

四、答案卷共有兩張(每張皆為雙面)，請勿在填充題之答案卷上書寫任何計算過程或於答案卷上註記與答案無關之符號。

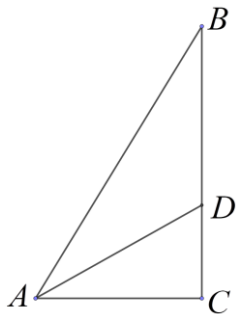
第一大題、填充題：

第一部份(共 8 題；每格 4 分，共 32 分。)

1. 將自然數依序刪去 2 的倍數、3 的倍數、5 的倍數，其餘依序不變，得一數列，求此數列的第 2022 項為_____。

2. 若 $10^{12m} = 625$ ， $10^{10n} = 32$ ，求 $(6m + 4n + 1)^6 =$ _____。

3. 如圖， $\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ，且 D 在 \overline{BC} 上滿足 \overline{AD} 平分 $\angle A$ ，若 $\frac{\overline{CD}}{\overline{AC}} = \frac{1}{2}$ ，則 $\frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} =$ _____。



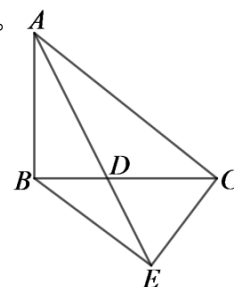
4. 已知 $n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 1$ ，其中 n 為正整數，例如 $5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$ 。試求滿足 $\frac{111!}{12^k}$ 為整數的最大正整數 k 值為_____。

5. 若 111^{111} 可以表示成 111 個連續的奇數之和，則這些奇數中最大的數是_____。

6. 三位數中，百位數、十位數、個位數均為奇數，且可以被 3 整除的數字共有_____個。

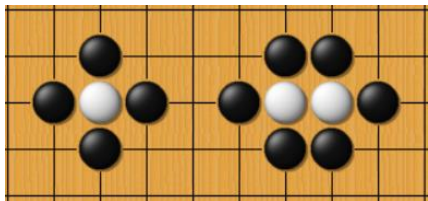
7. 設數列 $\langle a_n \rangle$ 共有四項，若前三項成等比數列且其和為 19，而後三項成等差數列且其和為 12，則序組 $(a_1, a_2, a_3, a_4) =$ _____。

8. 如右圖，若 $\overline{AB} = 4$ ， $\overline{BC} = 5$ ， $\overline{BD} : \overline{DC} = 2 : 3$ ， $\angle ABC = \angle BEC = 90^\circ$ ，則 \overline{BE} 的長為_____。

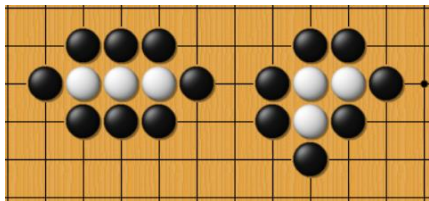


第二部份（共 8 題；每格 6 分，共 48 分。）

9. 圍棋是一種歷史悠久的桌遊，棋盤由橫縱各19條等距線段構成，共交織出361個交叉點，棋子有黑白兩色，落子需在棋盤的交叉點上。若一個或一團白子的周圍所有相鄰(有線段連接)的交叉點都有黑子，白子就被黑子圍住了。如圖一，圍住1個白子需要4個黑子，圍住2個白子需要6個黑子；如圖二，圍住3個白子需要8個黑子或7個黑子，像這樣，在不借助棋盤邊界的情況下，20個黑子最多可以圍住_____個白子。



圖一



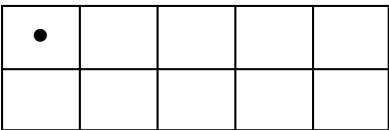
圖二

10. 如右圖，格子中的黑點每次移動的規則如下：

- (1) 可往右移動1格或2格，但不可往左移動。
- (2) 可往下移動，但不可往上移動。

試求黑點由起點處(左上角)移動到終點處(右下角)的方法數共有_____種。

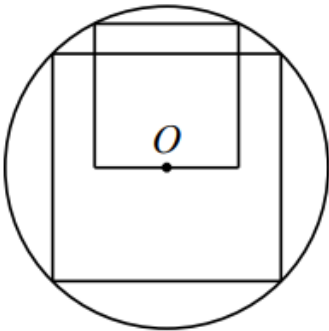
【例：「右1，右1，右1，下1，右1」與「右1，右1，右1，右1，下1」與「右1，右1，右2，下1」均視為不同的移動方法】



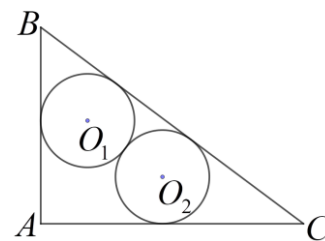
11. 滿足 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2023}$ 的正整數數對 (x, y) 共有_____組。

12. 若 $3 - 3^2 + 3^3 - 3^4 + \dots + 3^{2019} - 3^{2020} + 3^{2021} - 3^{2022} = 60a + b$ ，其中 a, b 均為整數，且 $0 \leq b < 60$ ，則 $b =$ _____。

13. 在一個圓心為 O 的圓之內部畫兩個正方形，其中大正方形的四個頂點都落在圓周上，而小正方形的兩個頂點落在圓周上且它的一個邊通過圓心，如圖所示。請問： $\frac{\text{大正方形面積}}{\text{小正方形面積}} =$ _____。



14. 如右圖，直角三角形 ABC 中， $\angle A$ 為直角，且滿足 $\overline{AB}=5$ ， $\overline{AC}=12$ ，若兩半徑相等的圓 O_1, O_2 互相外切，且圓 O_1 同時與 $\overline{AB}, \overline{BC}$ 相切，圓 O_2 同時與 $\overline{AC}, \overline{BC}$ 相切，則圓 O_1 的半徑長為_____。



15. 有 15 個人坐在一排的十五個座位上，若他們重新站起來再任意入座，則「每人都坐在自己原來座位或隔壁座位」的入座方法數有_____種。

16. 化簡求值： $\sqrt{2020 \times 2026 \times 2029 \times 2035 + 729} =$ _____。

第二大題、計算證明題（共 3 題；第一題 6 分，第二、三題各 7 分，共 20 分。）

- 試求滿足 $(x+y)^2 = (x+3)(y-3)$ 的所有實數解 $(x, y) =$ _____。
- 設 a, b, c 為正實數，證明： $(a^5 - a^2 + 3)(b^5 - b^2 + 3)(c^5 - c^2 + 3) \geq (a^3 + 2)(b^3 + 2)(c^3 + 2)$
- 將 $1, 2, 3, \dots, 2021$ 這 2021 的數字不一定要按順序地隨意圍繞在一個圓周上，是否存在一種放置的順序，使得相鄰兩數的和都是質數？如果可以，請寫出所有的排列情況。如果不行，請證明之。