

臺中市立文華高級中等學校 112 學年度
學術性向資賦優異 【數理類】學生入班鑑定

數學能力評量 試題卷

測驗說明：

一、請將答案寫在答案卷上，否則不予計分。(答案卷請勿使用鉛筆作答！)

二、試題分為兩部份：

第一大題為填充題(分為第一部份 8 題與第二部份 10 題)：答案須化至最簡形式(最簡分式、根式有理化…等)，否則不予計分，未完全答對者也不予計分。

第二大題為計算證明題(共 3 題)：請清楚標明題號並寫出演算過程(或敘明理由)，否則不予計分。

三、試題所附之圖形(比例)僅供參考，不一定代表實際比例大小。

四、答案卷共有兩張(每張皆為雙面)，請勿在填充題之答案卷上書寫任何計算過程或於答案卷上註記與答案無關之符號。

第一大題、填充題：

第一部份 (共 8 題；每格 4 分，共 32 分。)

1. 有一個三角形的三邊長為 13、14、15，則此三角形的面積為_____。

2. 若 $2^a = 3$ ， $3^b = 25$ ， $5^c = 8$ ，則 $abc =$ _____。

3. 方程式 $|x| + |y| + |z| = 20$ 的整數解 (x, y, z) 有_____組。

4. 數列 1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 5, 6, … 中，首 111 項之和是_____。

5. 若 $\begin{cases} x+y+z=11 \\ x^2+y^2+z^2-4x+6y-8z=35 \end{cases}$ ，則 $\frac{1}{x-2} + \frac{1}{y+3} + \frac{1}{z-4} =$ _____。

6. 滿足 $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} < \frac{1}{10}$ 的最小正整數 n 為_____。

7. $\triangle ABC$ 中， $\overline{AB}=5$ 、 $\overline{BC}=6$ 、 $\overline{CA}=9$ ， $\angle B$ 與 $\angle C$ 的內角平分線交於 D 點，試求 $\frac{\triangle DBC \text{面積}}{\triangle ABC \text{面積}} =$ _____。

8. 已知 a, b 是方程式 $x^2 - 7x + 6 = 0$ 的兩個根， c, d 是方程式 $x^2 - 7x + k = 0$ 的兩個根，
若 $|a-c| = |b-d| = 2$ ，則實數 k 的最小值 = _____。

第二部份（共 10 題；每格 5 分，共 50 分。）

9. 一個四位數與此四位數的 4 個數字的和等於 2023，則此四位數為_____。
【例如：9876 這個四位數與它的 4 個數字的和為 $9876 + 9 + 8 + 7 + 6 = 9906$ 】

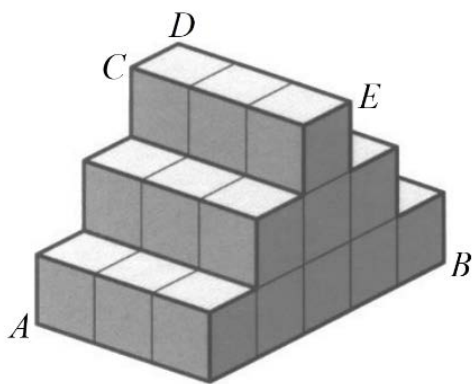
10. 已知 x 為正數，

且滿足 $\frac{1}{x(x+2)} + \frac{1}{(x+2)(x+4)} + \frac{1}{(x+4)(x+6)} + \frac{1}{(x+6)(x+8)} + \frac{1}{(x+8)(x+10)} = \frac{1}{2022}$ ，

則 $x =$ _____。

11. 一個不透明箱子共有 6 張卡牌，分別標示數字 1, 2, 3, 4, 5, 6，每一張卡片被取出的機率均相同，若從箱中一次取一張，取後不放回箱中，連取三次，所得到的號碼依次為百位、十位、個位而形成三位數，則此數為 3 的倍數之機率為 _____。（化為最簡分數）

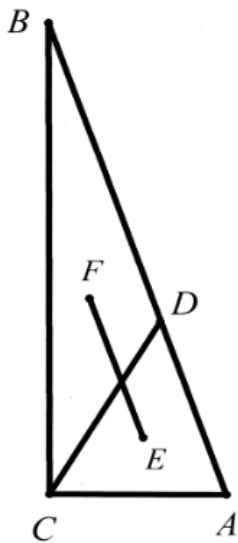
12. 如下圖為放置方桌面的 27 小正立方體所堆成的小障礙物，已知每個小正立方體的邊長皆為 1。今有一螞蟻欲從 A 點爬越障礙物到 B 點，須爬表面且經過 CDE 所在的平面，試問螞蟻爬行的最短路徑長為 _____。



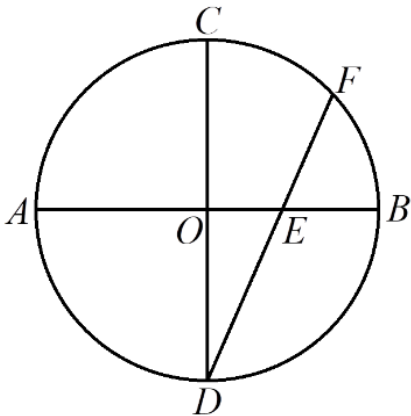
13. 若 $x^2 = \underbrace{111\cdots 1}_{20\text{個}} - \underbrace{222\cdots 2}_{10\text{個}}$ ，則 x 的各位數字和為 _____。

14. 已知 $x + y = 3$ 且 $xy = 1$ ，求 $x^2 + x^4 + y^2 + y^4 =$ _____。

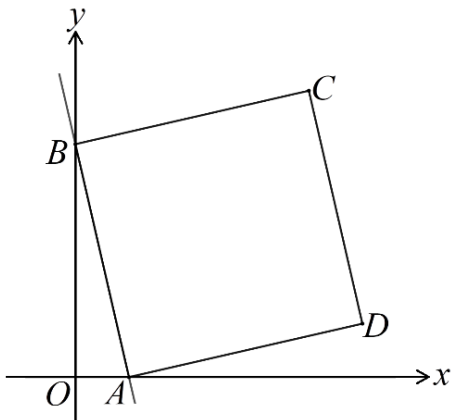
15. 如下圖， $\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， D 為 \overline{AB} 上一點， E 、 F 分別為 $\triangle ACD$ 、 $\triangle BCD$ 的重心，若 $\overline{AC} = 7$ ， $\overline{BC} = 24$ ，則 $\overline{EF} =$ _____。



16. 如下圖， \overline{AB} 和 \overline{CD} 是圓 O 的兩條互相垂直的直徑，弦 \overline{DF} 交 \overline{AB} 於 E 點，若 $\overline{DE} = 20$ 、 $\overline{EF} = 23$ ，則圓 O 的面積等於_____。

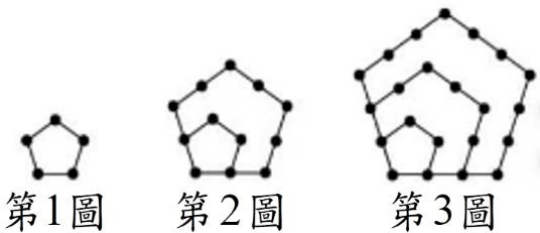


17. 如下圖，已知直線 $\sqrt{19}x + y - \frac{5\sqrt{19}}{2} = 0$ 與 x 軸交於 A 點，與 y 軸交於 B 點，且 $ABCD$ 為正方形，若點 $P(\frac{5}{2}, t)$ 在第一象限，且 $\triangle ABP$ 的面積為 $ABCD$ 面積的一半，則 $t =$ _____。



18. 下圖中，任兩相鄰黑點的線段長都是1，按照下面這樣的規律：
 第1圖的所有線段長度總和為5；
 第2圖的所有線段長度總和為13；
 第3圖的所有線段長度總和為24；

 求第25圖的所有線段長度總和=_____。



第二大題、計算證明題（共 3 題；每題 6 分，共 18 分。）

1. 已知拋物線 $y = x^2 - 4x + 7$ 與直線 $y = h$ 及 $y = h + 3$ 分別交於 A 、 B 及 C 、 D ，若 A, B, C, D 四點恰可形成一等腰梯形 $ABCD$ ，且面積為 15 平方單位，則 $h =$ _____。

2. 有一個四邊形的邊長分別為 15、15、15、20，它的每個頂點都在同一個圓周上。
在此圓外畫一個外切正方形，請問這個正方形的面積為_____平方單位。

3. 已知 a 與 b 皆為正實數，且 $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} - \frac{1}{a+b} = 0$ ，則

第 1 小題：求 $\left(\frac{a}{b}\right)^3 - \left(\frac{b}{a}\right)^3 =$ _____。 第 2 小題：求 $\left(\frac{a}{b}\right)^3 + \left(\frac{b}{a}\right)^3 =$ _____。