

臺中市立文華高級中等學校 114 學年度
學術性向資賦優異 【數理類】學生入班鑑定

數學實作評量 試題卷

測驗說明：

一、考試時間：120 分鐘

二、請使用 **藍色或黑色原子筆** 將答案寫在答案卷上，否則不予計分。(答案卷請勿使用鉛筆作答！)

三、試題分為兩部份：

第一大題為填充題(分為第一部份 8 題與第二部份 10 題)：答案須化至**最簡形式**(最簡分式、根式有理化…等)，否則不予計分，未完全答對者也不予計分。

第二大題為計算證明題(共 3 題)：請清楚標明題號並寫出演算過程(或敘明理由)，否則不予計分。

四、試題所附之圖形(比例)僅供參考，不一定代表實際比例大小。

五、答案卷共有兩張(每張皆為雙面)，請勿在填充題之答案卷上書寫任何計算過程或於答案卷上註記與答案無關之符號。

第一大題、填充題：

第一部分(共8題；每格4分，共32分。)

1. 「用2、5、7、8組成一四位數，且數字不重複」，則滿足此條件之所有四位數之平均值為_____。

2. 已知 $|a| + a + 3b = 3$ 且 $3a + b - |b| = 7$ ，試求 $a + b =$ _____。

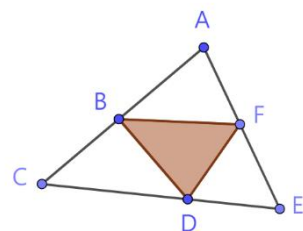
3. $\left(\frac{\sqrt{7}+\sqrt{3}-2}{\sqrt{2}}\right)^4 + \left(\frac{\sqrt{7}-\sqrt{3}+2}{\sqrt{2}}\right)^4 =$ _____。

4. 已知數列 $\langle a_n \rangle$ 對於任意正整數 p, q ，恆有 $a_p + a_q = a_{p+q}$ ，若 $a_1=13$ ，求 $a_{2025}=$ _____。

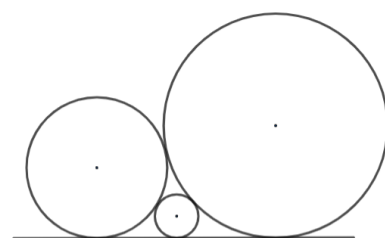
5. 有一面積為 35 的圓內接凸四邊形 ABCD，其中 \overline{AC} 是直徑，若 $\overline{AD} = \frac{1}{2}\overline{CD}$ ， $\overline{AB} = \sqrt{10}$ ，則此四邊形 ABCD 的周長為_____。

6. 已知 $f(x) = (2x^2 + 5x + 1)(3x^2 - x - 7)$ ， $g(x) = x^2 - 3x + 2$ ，若 $f(x) = 0$ 的四根為 a 、 b 、 c 、 d ，則 $g(a) \times g(b) \times g(c) \times g(d) =$ _____。

7. 如右圖，以數字 1~6 標示各頂點數值（數字不重複使用），以 ∇ABF 表示三角形 ABF 的三頂點數值和，已知 $\nabla ABF = 11$ 、 $\nabla BCD = 14$ 、 $\nabla DEF = 9$ ，則 ∇BDF 之值為_____。

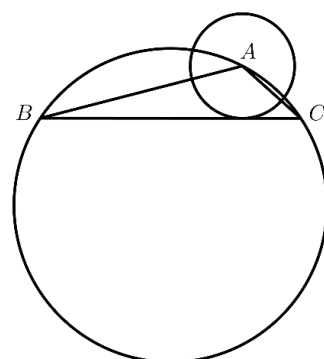


8. 如右圖，有大、中、小三個圓皆與一直線外切，若大圓的半徑為 36，中圓的半徑為 9，試求小圓的半徑為_____。



第二部分(共 10 題；每格 5 分，共 50 分。)

9. 如右圖，大圓的半徑為 30，小圓的半徑為 10，A 在大圓的圓周上且為小圓的圓心， \overline{BC} 為大圓的弦且與小圓相切。若 $\overline{AC} = 15$ ，則 $\overline{AB} =$ _____。

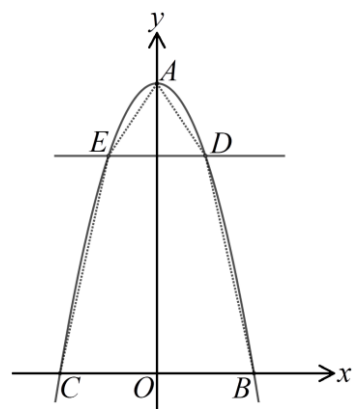


10. $\triangle ABC$ 的內切圓切 \overline{BC} 於 D ，若 $\overline{AB}=7$ 、 $\overline{BC}=8$ 、 $\overline{CA}=9$ ，則 $\overline{AD}=\underline{\hspace{2cm}}$ 。

11. 設 a 、 b 為實數且滿足 $101a^2 + 2020a + 109 = 0$ 、 $109b^2 + 2020b + 101 = 0$ ，求 $\frac{a}{b}$ 四種可能值的總和為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

12. 已知 P 為正三角形 ABC 內部一點，且 $\overline{AP}=3$ 、 $\overline{BP}=4$ 、 $\overline{CP}=5$ ，則 $\triangle ABC$ 的面積為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 平方單位。

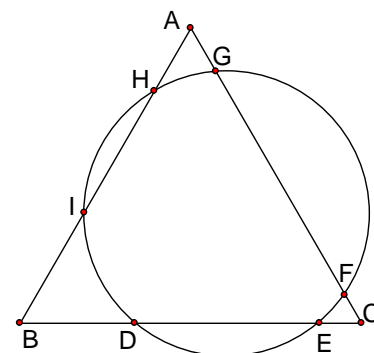
13. 二次函數 $f(x) = -x^2 + k$ 的圖形如右，直線 \overline{ED} 平行於 x 軸且在 x 軸上方，若五邊形 $ADBCE$ 的面積之最大值為 $\frac{135}{4}$ ，試求 $k = \underline{\hspace{2cm}}$ 。



14. 小於 2022 的正整數中，有 $\underline{\hspace{2cm}}$ 個數恰好有三個正因數。

15. 老師在黑板上從寫1到 n ，共 n 個連續正整數，然後擦去其中兩個連續整數 x 與 $x+1$ ，若已知剩下的 $n-2$ 個數的平均數為 $\frac{55}{4}$ ，則老師擦去的數字 x 為_____。

16. 如右圖，一圓交一正三角形 ABC 於 D 、 E 、 F 、 G 、 H 、 I 六點，若 $\overline{AG}=2$ ， $\overline{FG}=13$ ， $\overline{CF}=1$ ， $\overline{HI}=7$ ，則 $\overline{BD} + \overline{BI} =$ _____。



17. 若實數 a, b, c, d 滿足方程組
$$\begin{cases} a \cdot (a+b+c+d) = 1 \\ (a+b) \cdot (b+c+d) = 1 \\ (a+b+c) \cdot (c+d) = 1 \\ (a+b+c+d) \cdot d = 1 \end{cases}$$
，則 $a+b+c+d =$ _____。

18. 投擲一顆公正的六面骰子(各面點數為1, 2, 3, 4, 5, 6)兩次，其出現的點數依次為 a, b ，若方程式 $x^2 + ax + b = 0$ 有兩實根 m, n ，則 $m^2 + n^2 < 11$ 的機率為_____。

第二大題、計算證明題(共3題；每題6分，共18分。)

1. 已知 $x = \frac{1}{\frac{1}{2001} + \frac{1}{2002} + \cdots + \frac{1}{2025}}$ ，求 x 的整數部份為_____。

2. 已知 a, b 均為正整數且 $a < b$ ，則滿足方程式 $\frac{1}{a} + \frac{2}{b} = \frac{3}{22}$ 的數對 $(a, b) =$ _____。

3. 已知 x, y, z 皆大於 0，求聯立方程式
$$\begin{cases} x\sqrt{yz} + y\sqrt{xz} + xy = 76 \\ y\sqrt{xz} + z\sqrt{xy} + yz = 95 \\ x\sqrt{yz} + z\sqrt{xy} + xz = 190 \end{cases}$$
 的解 $(x, y, z) =$ _____。