

國立臺中文華高級中學 100 學年度
數理暨語文資賦優異學生鑑定—第二階段 數學科試題卷

測驗說明：

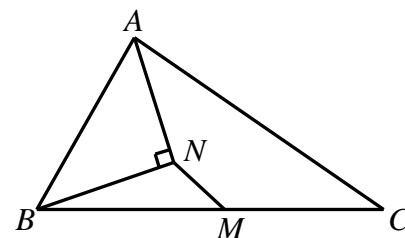
本試卷分二個部分(共二頁)，滿分為 100 分。第一部分為填充題，共 10 題，每題 7 分。第二部分為計算題，有 3 題，共 30 分。計算題必須寫出計算(推算)過程，否則不予計分。可利用此試題卷空白處計算，切勿在答案卷上計算!! 答案卷上請勿用鉛筆作答!!

一、填充題：

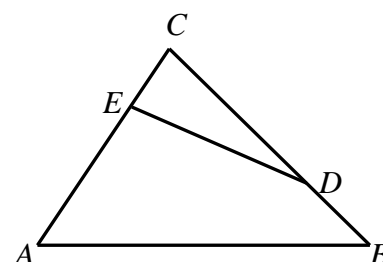
1. 設有 A 、 B 兩支大瓶子，開始時， A 瓶裝有 1 公升的純酒精， B 瓶裝有 $\frac{1}{2}$ 公升的礦泉水。每一輪操作都是先將 A 瓶的溶液倒出一半到 B 瓶，然後再將 B 瓶的溶液倒出一半回 A 瓶（不考慮酒精與水混合後體積的縮小）。則在第二輪操作後， A 瓶溶液中的酒精濃度為_____ %。
2. 將正整數的立方由小到大的順序排成：1 8 27 64 125 216 ...，即第一個數字為 1，第二個數字為 8，第三個數字為 27，第四個數字為 64，依此類推，...，則第 50 個數字為_____。
3. 海綿寶寶與派大星在一個圓型跑道上跑步 20 分鐘。海綿寶寶以每分鐘 300 公尺的速度依順時針方向在跑道外圈跑，其半徑為 50 公尺。派大星以每分鐘 240 公尺的速度依逆時針方向在跑道內圈跑，其半徑為 40 公尺。若兩人的起跑點在同一條從圓心連出來的半徑上，則兩人從開始到結束共交會_____次。
4. 由 1, 2, 3, ..., 200 中，刪去與 12 互質的數之後，剩餘的數總和為_____。
5. 求 $\sqrt{11 \times 12 \times 13 \times 14 + 1} - 12^2 =$ _____。
6. 若一個正整數等於它的數字和的 4 倍，則滿足此條件的所有正整數總和為_____。
7. 求 $5^2, 6^2, 7^2, \dots, 95^2$ 共 91 個數中，十位數字是奇數的有_____個。

8. 設 x 為正整數，若 \sqrt{x} 的整數部分以 $f(x)$ 表示(例如： $f(2)=1$ ， $f(5)=2$ ， $f(10)=3$)，已知 $f(1)+f(2)+\cdots+f(n)=100$ ，則正整數 $n=$ _____。

9. $\triangle ABC$ (如右圖)， M 是 \overline{BC} 中點， \overline{AN} 平分 $\angle BAC$ ， $\overline{BN} \perp \overline{AN}$ 於點 N ，且 $\overline{AB}=10$ ， $\overline{BC}=15$ ， $\overline{MN}=3$ ，則 $\triangle ABC$ 周長為_____。



10. $\triangle ABC$ (如右圖)， D 是 \overline{BC} 上一點，且 $\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} = \frac{1}{2}$ ，若在 \overline{AC} 上取一點 E ，使得四邊形 $ABDE$ 面積是 $\triangle ABC$ 面積的 $\frac{4}{5}$ 倍，則 $\frac{\overline{AE}}{\overline{EC}} =$ _____。



二、計算題：

1. 已知鑽石分成 A 、 B 、 C 三種等級，現今珠寶店老闆進了一批鑽石共 25 顆，並一顆一顆依鑽石的等級評分，其評分方式如下： A 級鑽石給 4 分， B 級鑽石給 1.5 分， C 級鑽石給 0 分。在總分 0 分至 100 分之間有些分數只能用唯一方式獲得，例如：總分 96 分只能由 A 級鑽石有 24 顆， B 級鑽石有 0 顆， C 級鑽石有 1 顆這種情形獲得。而有些分數則恰有二種方式可獲得，例如：總分 22.5 分表示獲得方式只有以下兩種：(1) A 級鑽石有 3 顆， B 級鑽石有 7 顆， C 級鑽石有 15 顆，(2) A 級鑽石有 0 顆， B 級鑽石有 15 顆， C 級鑽石有 10 顆。已知此批鑽石的總分恰可用四種方式獲得，則其總分共有哪幾種可能？各可由哪四種方式獲得？ (9 分)

2. 設 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ 為等差數列， S_n 為此數列的前 n 項和，已知 $S_7 = 7$ ， $S_{15} = 75$ ， $T_n = \frac{S_1}{1} + \frac{S_2}{2} + \cdots + \frac{S_n}{n}$ ，

求：(1) T_4 (3 分) (2) T_n (6 分)

3. 有四條線段長分別為 9、5、 x 、1，用他們拼成兩個直角三角形，且 \overline{AB} 與 \overline{CD} 是其中兩條線段，如下圖，則 x 的值可能有哪些？(12 分)

