

國立臺中文華高級中學九十八學年度
數理資優班複選數學考科試題本

作答注意事項

數與配考試時間：80 分鐘

題分：

1. 共 11 大題 20 小題，皆採計算題型式。
2. 每小題皆為 5 分，滿分 100 分。

作答方式：

1. 請直接將答案寫在答案本上。
2. 答題完畢請繳交此試題本。
3. 答案均須有簡單計算過程，若只有答案斟酌扣分。

※請聽從指示後，翻頁作答

國立臺中文華高級中學九十八學年度 數理資優班複選數學考科試題本

【1】、已知總和公式： $1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$ ； $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

例如： $1+2+3+\cdots+10=\frac{10\times 11}{2}=55$ ； $1^2+2^2+3^2+\cdots+10^2=\frac{10(10+1)(2\times 10+1)}{6}=\frac{10\times 11\times 21}{6}=385$

則(1) $11^2+12^2+\cdots+30^2=$ _____

(2) $1^2-2^2+3^2-4^2+\cdots+39^2-40^2=$ _____

(3) 將1、2、3、4、5、6、7、8、9、10共10個數字，兩兩乘積可得45個數字，求這45個數字總和=_____

【2】、從1到1000的正整數中，去掉2或3或5的倍數後，將剩下的數字依序排列得一數列，

$a_1=1$ 、 $a_2=7$ 、 $a_3=11$ 、 $a_4=13$ 、 \cdots 、 $a_n=997$ ，

(1) 項數 $n=$ _____

(2) $a_{80}=$ _____

(3) 設 $S_{80}=a_1+a_2+\cdots+a_{80}$ ，則 $S_{80}=$ _____

【3】、已知 $x^2-2x-1=0$ ，求下列各式的值：

(1) $x^2+\frac{1}{x^2}=$ _____

(2) $x^3-\frac{1}{x^3}=$ _____

(3) 又若 $x^2-2x-1=0$ 的兩根為 α 、 β ，則 $(\alpha^3-2\alpha^2+\alpha)^2+(\beta^3-2\beta^2+\beta)^2=$ _____

【4】、若 $\frac{26xy607}{792}$ 為有限小數，則數對 $(x, y)=$ _____

【5】、設 α 、 β 均為質數，若方程式 $x^2-125x+m=0$ 的兩根為 α^2 、 β^2 ，則 $m=$ _____

【6】、三互異整數 x 、 y 、 z ，滿足 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{4}$ 且 $x < y < z$ ，請將數對 (x, y, z) 的解全部列出 _____

【7】、設 x 、 y 、 z 均為實數，且 $x - y = 2 + \sqrt{3}$ ， $x - z = 2 - \sqrt{3}$ ，則 $x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx =$ _____

【8】、解方程式 $3\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 16\left(x + \frac{1}{x}\right) + 26 = 0$ ，則 $x =$ _____

【9】、(1) 設 n 是三位正整數，且 $\frac{n}{10}$ 、 $\frac{n^2}{72}$ 、 $\frac{n^3}{420}$ 也都是正整數，則 n 有 _____ 個解。
(2) 設 k 是正整數，且 $\frac{120}{k}$ 、 $\frac{2400}{k^2}$ 、 $\frac{7200}{k^3}$ 也都是正整數，則 k 最大值為 _____

【10】、(1) 已知一個等差數列的首項為 41 ，公差為 -4 ，第 k 項表為 a_k ，則 $|a_1| + |a_2| + |a_3| + \cdots + |a_{20}| =$ _____
(2) 等差數列 $\{a_n\}$ 共有 n 項，其和為 360 ，若前 5 項的和等於 15 ，最後 5 項的和為 85 ，則 $n =$ _____

【11】、(1) 試求 $\frac{1}{1 \times 3} + \frac{1}{2 \times 4} + \frac{1}{3 \times 5} + \frac{1}{4 \times 6} + \cdots + \frac{1}{18 \times 20} =$ _____
(2) 已知 $\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)} \right]$ ，求 $\frac{1}{1 \times 2 \times 3} + \frac{1}{2 \times 3 \times 4} + \frac{1}{3 \times 4 \times 5} + \cdots + \frac{1}{18 \times 19 \times 20} =$ _____